

# Elektrotechnik Formelsammlung

Laurent Cohn <info@cohn.ch>  
Andrew Mustun <andrew@mustun.com>  
Thomas Jund <info@jund.ch>  
Martin Suter <martin@suter.to>

25. Januar 2003

Version 2.0

Formelsammlung für das Fach EMT des Studiengangs IT an der ZHW.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Gleichstromkreise</b>	<b>1</b>
1.1 Spannung, Strom, Widerstand, Energie, Leistung . . . . .	1
1.2 Spannungs- / Stromquellen . . . . .	2
1.3 Leistungsanpassung . . . . .	3
1.3.1 Beispiel . . . . .	3
1.4 Serie- / Parallelschaltung . . . . .	4
1.5 Temperaturabhängigkeit von Widerständen . . . . .	5
1.6 Spezifischer Widerstand . . . . .	5
1.7 Stern-Dreieck-Umwandlung . . . . .	6
1.8 Brückenschaltung mit Stern-Dreieck-Umwandlung . . . . .	7
1.8.1 Brückenschaltung mit Zweipolverfahren . . . . .	8
1.9 Überlagerungssatz . . . . .	9
1.10 Knotenpotentialverfahren . . . . .	10
1.10.1 Rezept . . . . .	10
1.10.2 Ideale Spannungsquellen . . . . .	11
<b>2 Elektrische Felder</b>	<b>13</b>
2.1 Elektrisches Strömungsfeld . . . . .	13
2.2 Elektrostatistisches Feld . . . . .	15
2.3 Elektromagnetisches Feld . . . . .	17
2.3.1 Beispiel . . . . .	19
2.3.2 Die Beschreibung des elektromagnetischen Feldes . . . . .	20
2.3.3 Hall-Effekt . . . . .	22
2.3.4 Transformator . . . . .	24
2.3.5 Kräfte im elektromagnetischen Feld . . . . .	25
2.4 Induktion . . . . .	26
<b>3 Schaltvorgänge</b>	<b>27</b>
3.1 RC - Glied . . . . .	27
3.1.1 Beispiel 1 . . . . .	29
3.1.2 Beispiel 2 . . . . .	30
3.2 RL-Glied . . . . .	31

<b>4 Nichtlineare Kennlinien</b>	<b>32</b>
4.1 Vorgehensweisen . . . . .	32
4.2 Linearisierung . . . . .	32
4.2.1 Beispiel: Ladung eines Akkus . . . . .	33
<b>5 Wechselstrom</b>	<b>34</b>
5.1 Allgemein . . . . .	34
5.2 Spezialfälle . . . . .	35
5.3 Komplexe Spannung . . . . .	36
5.4 Kompensation . . . . .	36
5.5 Komplexer Widerstand und Leitwert . . . . .	37
5.6 Komplexe Leistung . . . . .	38
5.7 Wechselstromleistung . . . . .	39
<b>6 Filter, Übertragungsfunktion und Bodediagramm</b>	<b>40</b>
6.1 Bodediagramm . . . . .	40
6.2 RC - Tiefpassfilter . . . . .	41
6.3 RC - Hochpassfilter . . . . .	42
6.4 RLC - Tiefpassfilter . . . . .	43
6.5 RLC - Hochpassfilter . . . . .	44
6.5.1 Doppel-T-Filter . . . . .	45
6.6 Umwandlung der Schaltung . . . . .	45
6.6.1 Berechnung der Übertragungsfunktion . . . . .	46
<b>7 Operationsverstärker</b>	<b>47</b>
7.1 Beispiel 1 . . . . .	47
7.2 Beispiel 2 . . . . .	48
<b>8 Messtechnik</b>	<b>49</b>
8.1 Messfehler . . . . .	49
8.1.1 Zufällig . . . . .	49
8.1.2 Berechnen der Messfehler . . . . .	49
8.1.3 Systematisch . . . . .	49

# 1 Gleichstromkreise

## 1.1 Spannung, Strom, Widerstand, Energie, Leistung

<i>Zeichen</i>	<i>Beschreibung</i>	<i>Einheit</i>
I	Strom (bewegliche Ladung)	A
U	Spannung	$\frac{J}{As} = \frac{Nm}{As} = V$
R	Widerstand	$V/A = \Omega$
r	Widerstand (differentiell)	$V/A = \Omega$
G	Leitwert	$1/\Omega = S$
Q	Ladungsmenge	$As = C$
t	Zeit	s
W	El. Arbeit (Energie)	$VAs = Ws = J$
P	El. Leistung	W

$$\text{Strom: } I = \frac{U}{R} = UG$$

$$\text{Ladung: } Q = It$$

$$\text{Differentieller Widerstand: } r = \frac{\Delta U}{\Delta I}$$

$$\text{Arbeit: } W = UQ = UI t = Pt$$

$$\text{Leistung: } P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R} = \frac{W}{t}$$

Für Quellen gilt: Leistung  $P$  ist am grössten, wenn der Innenwiderstand gleich dem Lastwiderstand ist:  $R_i = R_L$ .

## 1.2 Spannungs- / Stromquellen

Ideale Spannungsquelle:  $U$  konstant

Reale Spannungsquelle:  $U$  sinkt bei Belastung (mit zunehmenden Strom)

Ideale Stromquelle:  $I$  konstant

Reale Stromquelle:  $I$  sinkt mit zunehmender Spannung

Umwandlung: siehe Abb. 1

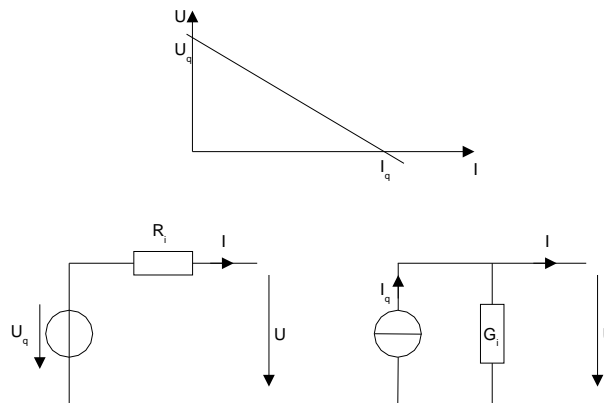


Abbildung 1: Quellenumwandlung

**Spannungsquelle (Abb. 1 links):**

$$R_i = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{U_q}{I_q} \qquad U_q = \frac{I_q}{G_i}$$

**Stromquelle: (Abb. 1 rechts):**

$$G_i = \frac{\Delta I}{\Delta U} = \frac{I_q}{U_q} \qquad I_q = \frac{U_q}{R_i}$$

### 1.3 Leistungsanpassung

**Leistungsanpassung** eines Lastwiderstands an den Innenwiderstand des Spannungserzeugers ermöglicht die grösstmögliche Leistungsentnahme.

Die Leistungsabgabe eines Spannungserzeugers ist am grössten, wenn **der Lastwiderstand gleich dem Innenwiderstand** ist.

$$R_L = R_i \qquad P_{max} = \frac{U_0^2}{4 \cdot R_i}$$
$$R_i = \frac{U_1 - U_2}{I_2 - I_1} \qquad R_i = \frac{\Delta U}{\Delta I}$$

#### 1.3.1 Beispiel

Ein Spannungserzeuger hat eine Leerlaufspannung von  $U_0 = 10V$  und einen Innenwiderstand  $R_i = 100\Omega$ .

Berechnen Sie die Abgabeleistung bei Leistungsanpassung!

*Lösung:*

$$R_L = R_i = 100\Omega$$

$$P_{max} = \frac{U_0^2}{4 \cdot R_i} = \frac{(10V)^2}{4 \cdot 100\Omega} = 0.25W$$

**1.4 Serie- / Parallelschaltung****Serie**

I überall gleich

U teilt sich auf

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_{tot} = R_1 + R_2 + R_3$$

**Parallel**

U überall gleich

I teilt sich auf

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$U = \frac{I}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$G_{tot} = G_1 + G_2 + G_3$$

**Spannungsteilerregel**

$$\frac{U_1}{U} = \frac{IR_1}{I(R_1 + R_2 + R_3)} = \frac{R_1}{R_{tot}}$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{IR_1}{IR_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

**Stromteilerregel**

$$\frac{I_1}{I} = \frac{UG_1}{U(G_1 + G_2 + G_3)} = \frac{G_1}{G_{tot}}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{UG_1}{UG_2} = \frac{G_1}{G_2}$$

### 1.5 Temperaturabhängigkeit von Widerständen

S.3

<i>Zeichen</i>	<i>Beschreibung</i>	<i>Einheit</i>
$\Delta R$	Widerstandsänderung	$\Omega$
$R_1$	Widerstand bei Anfangstemp.	$\Omega$
$\alpha$	Temp. Beiwert für Anfangstemperatur	$\frac{1}{K}$
$\Delta\vartheta$	Temp. Änderung	K

PTC: pos. temp. coefficient (Widerstand steigt wenn Temp. steigt)

NTC: neg. temp. coefficient (Widerstand sinkt wenn Temp. steigt)

$$\Delta R = R_1 \alpha \Delta \vartheta$$

### 1.6 Spezifischer Widerstand

S.58

<i>Zeichen</i>	<i>Beschreibung</i>	<i>Einheit</i>
$R$	Widerstand des Leiters	$\Omega$
$\rho$	Spezifischer Widerstand	$\Omega m$
$l$	Länge des Leiters	$m$
$A$	Querschnitt des Leiters	$m^2$

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

1.7 Stern-Dreieck-Umwandlung

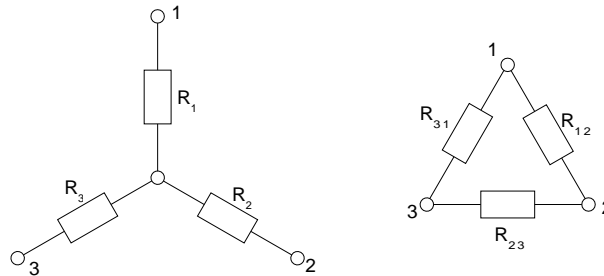


Abbildung 2: Stern-Dreieck-Umwandlung

Zeichen	Beschreibung	Einheit
$R_1, R_2, R_3$	Widerstände in Sternschaltung	$\Omega$
$R_{12}, R_{23}, R_{31}$	Widerstände in Dreieckschaltung	$\Omega$

**Stern-Dreieck-Umwandlung**

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} \quad R_{31} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2} \quad R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}$$

**Dreieck-Stern-Umwandlung**

$$R_1 = \frac{R_{31} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad R_2 = \frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad R_3 = \frac{R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

1.8 Brückenschaltung mit Stern-Dreieck-Umwandlung

ges.:  $I_m$

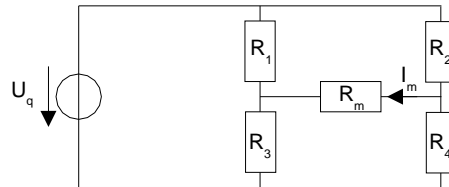
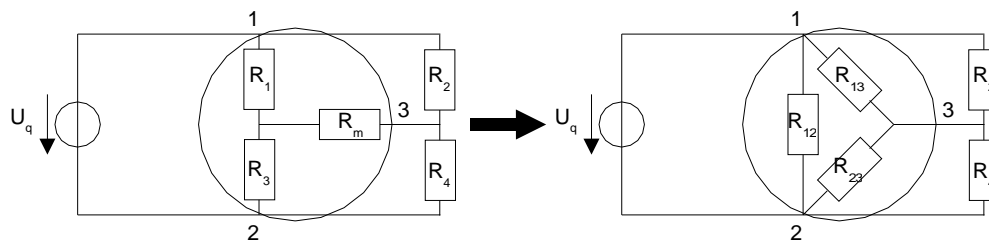


Abbildung 3: Brückenschaltung

1. Stern-Dreieck-Umwandlung (siehe 1.7):



2. Gesamtwiderstand berechnen
3. Gesamtstrom berechnen
4. Mit Stromteilerregel  $I_m$  berechnen

1.8.1 Brückenschaltung mit Zweipolverfahren

ges.:  $I_m$

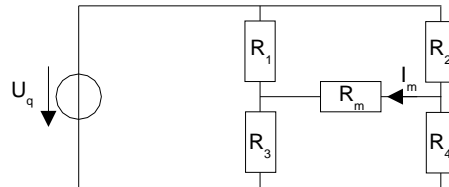
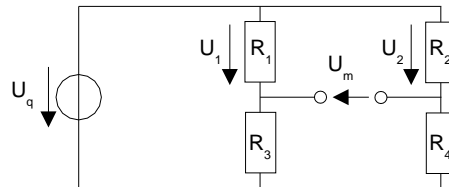
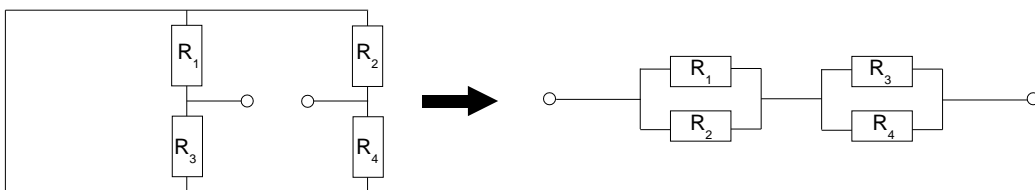


Abbildung 4: Brückenschaltung

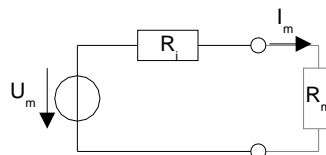
1. Mitte ausschneiden (Schaltung wird von hier aus als Zweipol betrachtet).
2. Spannung  $U_m$  mit Hilfe der Teilspannungen  $U_1$  und  $U_2$  berechnen ( $U_m = U_2 - U_1$ ).  $U_m$  entspricht der Leerlaufspannung des Zweipols.



3. Spannungsquellen kurzschliessen und Stromquellen ausschneiden:  $U_q = 0$  setzen. Gesamt-widerstand der Schaltung vom Zweipol aus gesehen berechnen. Dieser entspricht dem Innenwiderstand  $R_i$  des Zweipols.



4. Stromfluss des Zweipols berechnen ( $I_m = \frac{U_m}{R_i + R_m}$ )



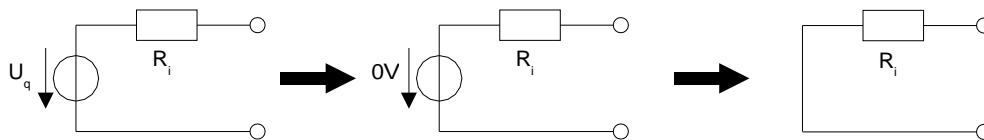
### 1.9 Überlagerungssatz

**Bemerkung:** Funktioniert nur mit linearen oder linearisierten Systemen (keine Dioden, usw.).

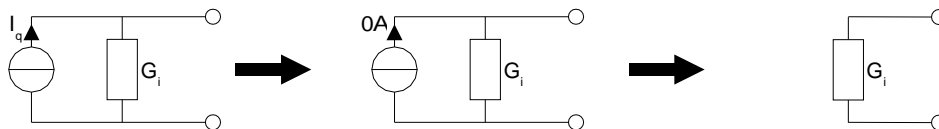
1. Einfluss jeder Quelle separat berechnen
2. Resultat berechnen (Summe der Einflüsse)

Damit der Einfluss einer einzelnen Quelle berechnet werden kann, müssen alle anderen Quellen auf Null gesetzt werden:

Spannungsquellen kurzschliessen:



Stromquellen herauschneiden:



## 1.10 Knotenpotentialverfahren

### 1.10.1 Rezept

1. Lineares Ersatzschaltbild aufzeichnen und Werte der Elemente berechnen.
2. Lineare Spannungsquellen in lineare Stromquellen umwandeln und Widerstände in Leitwerte.
  - (a) Ideale Spannungsquellen können nicht umgeformt werden. Der Bezugsknoten muss so gewählt werden, dass ein Anschluss der idealen Spannungsquelle am Bezugsknoten liegt.
  - (b) Gesteuerte lineare Spannungsquellen werden in gesteuerte lineare Stromquellen umgewandelt.
3. Bezugsknoten wählen (üblicherweise Schaltungsmasse) und mit 0 bezeichnen.
4. Knoten durchnummerieren und alle Knotenspannungen eintragen mit Pfeilrichtung zum Bezugsknoten hin.
5. Matrix  $[G]$  aufstellen.
  - (a) Die Hauptdiagonale enthält die Knotenleitwerte. Ein Knotenleitwert ist die Summe der am betreffenden Knoten angeschlossenen Leitwerte. Das Vorzeichen ist immer positiv.
  - (b) Die anderen Elemente enthalten die Kopplungsleitwerte. Ein Kopplungsleitwert ist der Leitwert zwischen den zwei betreffenden Knoten. Das Vorzeichen ist immer negativ.
  - (c) Kontrolle: Die Matrix muss symmetrisch sein.
6. Vektor  $[I]$  aufstellen
  - (a) Ein Element ist die vorzeichenrichtige Summe aller an diesem Knoten angeschlossenen Stromquellen. Stromquellen, deren Pfeil auf den Knoten hin zeigen werden positiv gezählt, Stromquellen, deren Pfeil vom Knoten weg zeigen negativ.
  - (b) Kontrolle: Alle Stromquellen kommen im Stromvektor zwei Mal vor, ausser jene, die einen Anschluss am Bezugsknoten haben.
7. Spezialfälle
  - (a) Ideale Spannungsquellen. Die Knotenspannung bei der idealen Spannungsquelle ist bekannt. Deshalb muss dieser bekannte Term aus dem Spannungsvektor auf die andere Seite des Gleichungssystems verschoben werden. Die Zeile mit der idealen Spannungsquelle kann gestrichen werden, weil sie nur redundante Informationen enthält. Der Grad des Gleichungssystems verringert sich pro ideale Spannungsquelle um 1 und die Matrix wird wieder symmetrisch (Kontrolle).
  - (b) Gesteuerte Quellen. Die unbekanntes Terme im Stromvektor müssen auf die andere Seite des Gleichungssystems verschoben werden. Der Grad des Gleichungssystems bleibt erhalten und die Leitwertmatrix wird unsymmetrisch.

8. Zahlenwerte einsetzen und Gleichungssystem mit Rechner auflösen ergibt den Spannungsvektor mit den Knotenspannungen
9. Aus den Knotenspannungen lassen sich bei Bedarf die Zweigspannungen berechnen und daraus die Zweigströme.

### 1.10.2 Ideale Spannungsquellen

Ideale Spannungsquellen lassen sich nicht in lineare Stromquellen umwandeln (mathematisch gesehen ergäbe sich eine Division durch 0). Eine ideale Spannungsquelle bedeutet, dass die Spannung, unabhängig vom Strom, konstant ist. Das heisst, dass eine Zweig- resp. Knotenspannung bereits bekannt ist und gar nicht berechnet werden muss.

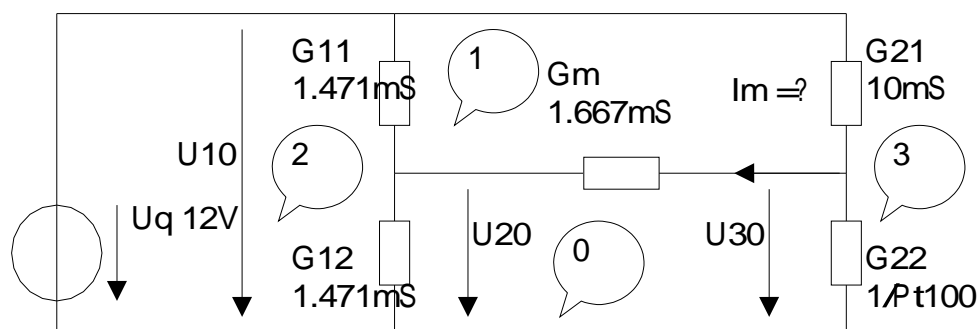
Im Spannungsvektor  $[U]$  dürfen nur unbekannte (zu berechnende) Werte vorkommen. Die Terme der idealen Spannungsquellen müssen also eliminiert werden, was zu einer Verkleinerung der Matrix führt.

#### Bezugsknoten wählen und alle Knoten nummerieren

Der Bezugsknoten muss an einem Anschluss der idealen Spannungsquelle gewählt werden. Sind mehrere ideale Spannungsquellen vorhanden muss der gemeinsame Anschluss aller Spannungsquellen als Bezugsknoten genommen werden (das ist meistens sowieso der Schaltungs-Nullpunkt). Gibt es keinen gemeinsamen Anschluss für mehrere ideale Spannungsquellen, kann das hier beschriebene Verfahren nicht angewendet werden.

Ausweg1: Maschenstrom-Verfahren anwenden. Das funktioniert immer.

Ausweg2: Zu den idealen Spannungsquellen (gedanklich) kleine Widerstände in Serie schalten, die (nun linearen, nicht idealen) Spannungsquellen in lineare Stromquellen umwandeln und ganz normal weiterfahren. Problematisch sind die hierbei entstehenden Rundungsfehler. Also mit verschiedenen Widerständen ausprobieren, ob die Resultate konvergieren.



Im Beispiel ist  $U_{10} = U_q$  bereits bekannt und muss nicht berechnet werden.

#### Matrizen auf- und umstellen

Zuerst werden die Matrizen in gewohnter Weise aufgestellt:  $[G] \times [U] = [I]$  Die Zeile in  $[G]$  mit der idealen Spannungsquelle muss nicht weiter beachtet werden, weil diese Knotenspannungen ja bekannt ist.

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ -G_{11} & G_m + G_{11} + G_{12} & -G_m \\ -G_{21} & -G_m & G_m + G_{21} + G_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_q \\ U_{20} \\ U_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eigentlich ist die Matrix-Darstellung nur eine abgekürzte Schreibweise für ein lineares Gleichungssystem. Damit die nächsten Schritte klar verständlich sind, schreibe ich das Gleichungssystem in der konventionellen Form auf:

$$\begin{aligned} I: & + \dots \cdot U_q + \dots \cdot U_{20} + \dots \cdot U_{30} = \dots \\ II: & - G_{11} \cdot U_q + (G_m + G_{11} + G_{12}) \cdot U_{20} - G_m \cdot U_{30} = 0 \\ III: & - G_{21} \cdot U_q - G_m \cdot U_{20} + (G_m + G_{21} + G_{22}) \cdot U_{30} = 0 \end{aligned}$$

Die Terme mit  $U_q$  müssen vom Spannungsvektor  $[U]$ , wo nur gesuchte Größen vorkommen dürfen auf die andere Seite des Gleichungssystems verschoben werden (Vorzeichen beachten!).

$$\begin{aligned} I: & + \dots \cdot U_{20} + \dots \cdot U_{30} = \dots - \dots \cdot U_q \\ II: & + (G_m + G_{11} + G_{12}) \cdot U_{20} - G_m \cdot U_{30} = 0 + G_{11} \cdot U_q \\ III: & - G_m \cdot U_{20} + (G_m + G_{21} + G_{22}) \cdot U_{30} = 0 + G_{21} \cdot U_q \end{aligned}$$

Wir lassen die Zeile mit der idealen Spannungsquelle (Knotenspannungen bekannt) weg und schreiben das Gleichungssystem wieder in der Matrix-Darstellung:

$$\begin{bmatrix} + & G_m + G_{11} + G_{12} & - & G_m \\ - & G_m & + & G_m + G_{21} + G_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{20} \\ U_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} \cdot U_q \\ G_{21} \cdot U_q \end{bmatrix}$$

Wir erhalten wieder eine symmetrische Matrix (Kontrolle), aber der Grad wurde um die Anzahl idealer Spannungsquellen erniedrigt und im Stromvektor  $[I]$  erscheinen formal nun Ströme. Das Verschieben der Terme auf die linke Seite kann natürlich direkt in der Matrix-Schreibweise erfolgen. Das Umformen geschieht dabei nur gedanklich. Spannungsvektor  $[U]$  und Resultate berechnen Der weitere Lösungsweg bis zu den Resultate geschieht genau gleich wie oben.

$$U[] = \begin{bmatrix} U_{20} \\ U_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.341 \\ 6.942 \end{bmatrix} V$$

Gesucht ist der Strom durch das Messinstrument.

Spannung am Messinstrument:  $U_m = U_{30} - U_{20} = 6.942V - 6.341V = 0.601V$

Strom durch das Messinstrument:  $I_m = U_m/R_m = 0.61V/600W = 1.00mA$

## 2 Elektrische Felder

### 2.1 Elektrisches Strömungsfeld

S.55

Zeichen	Beschreibung	Einheit
$I$	El. Strom	$A$
$J$ od. $S$	El. Stromdichte	$\frac{A}{m^2}$
$A$	Querschnittsfläche	$m^2$
$E$	El. Feldstärke	$\frac{V}{m}$
$U$	El. Spannung	$V$
$\varphi$	Potential	$V$
$l$	Strecke (Länge des Feldes)	$m$
$\sigma$	spezifische Leitfähigkeit (spez. Leitwert)	$\frac{S}{m}$
$\rho$	spezifischer Widerstand	$\frac{\Omega \cdot mm^2}{m}$
$R$	Widerstand	$\frac{V}{A} = \Omega$
$G$	Leitwert	$\frac{A}{V} = S$

#### Eigenschaften

Leitendes Material

 $I \neq 0$ 

Äquipotentialflächen rechtwinklig zu Feldlinien

Feldlinien haben Anfang und Ende

allgemein:

$$J = \frac{dI}{dA}$$

$$I = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

$$E = \frac{dU}{dl}$$

$$U_{12} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

homogen:

$$J = \frac{I}{A}$$

$$I = J \cdot A$$

$$E = \frac{U}{l}$$

$$U = E \cdot l$$

Kirchhoffsche Knotenregel:

$$I = \oint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$I = \sum I_n$$

Kirchhoffsche Maschenregel:

$$U = \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$U = \sum U_n$$

$$\varphi = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$U = \Delta\varphi$$

Materialeinfluss:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{E} = \rho \vec{j}$$

Widerstand, Leitwert:

$$R = \frac{1}{G} = \frac{U}{I} = \frac{\rho \cdot l}{A} = \frac{l}{\sigma \cdot A}$$

Strom-Spannungs-Gleichung

$$R = \frac{U}{I}$$

Leistung

$$P = \int_V E \cdot J \cdot dV$$

$$P = U \cdot I$$

## 2.2 Elektrostatistisches Feld

Zeichen	Beschreibung	Einheit
$\Psi$ od. $Q$	El. Fluss (sich verschiebende Ladung)	$As = C$
$D$	El. Flussdichte (Verschiebungsdichte, el. Erregung)	$\frac{As}{m^2}$
$A$	Querschnittsfläche	$m^2$
$E$	El. Feldstärke	$\frac{V}{m}$
$U$	El. Spannung	$V$
$\phi$	Potential	$V$
$l$	Strecke (Länge des Feldes)	$m$
$\epsilon_0$	Permittivität im Vakuum $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$	$\frac{As}{Vm}$
$\epsilon_r$	Permittivität des Materials	$\frac{As}{Vm}$
$C$	Kapazität	$\frac{As}{V} = F$

### Eigenschaften

Isolator zwischen Elektroden

$$I = 0$$

Äquipotentialflächen rechtwinklig zu Feldlinien

Feldlinien haben Anfang und Ende

allgemein:

$$D = \frac{dQ}{dA}$$

$$Q = \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

$$E = \frac{dU}{dl}$$

$$U_{12} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

homogen:

$$D = \frac{Q}{A}$$

$$Q = D \cdot A$$

$$E = \frac{U}{l}$$

$$U = E \cdot l$$

Gesetz von Gauss für elektrostatisches Feld:

$$Q = \oint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

$$Q = \sum Q_n$$

Kirchhoffsche Maschenregel:

$$U = \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$U = \sum U_n$$

$$\phi = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$U = \Delta\phi$$

Materialeinfluss:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

Kapazität:

$$C = \frac{dQ}{dU}$$

$$C = \frac{Q}{U}$$

$$C_{\text{Plattenkondensator}} = \frac{\epsilon \cdot A}{l}$$

Strom-Spannungs-Gleichung:

$$i = C \cdot \frac{du}{dt}$$

Gespeicherte Energie:

$$W = \frac{1}{2} \int_V EDdV$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot U \cdot Q$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}$$

Kräfte (gleichgerichtet wie Feldlinien):

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$$

2.3 Elektromagnetisches Feld

S.66

Zeichen	Beschreibung	Einheit
$\Phi$	Magnetischer Fluss	$Vs = Wb$
$B$	Magnetische Flussdichte (magnetische Induktion)	$T = \frac{Vs}{m^2}$
$A$	Querschnittsfläche	$m^2$
$H$	Magnetische Feldstärke (magn. Erregung)	$\frac{A}{m}$
$V_m$	Magnetische Spannung	$A$
$\Theta$	El. Durchflutung	$A$
$l$	Länge der Feldlinie	$m$
$\mu_0$	Permeabilität im Vakuum (magn. Feldkonstante) $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} = 1.257 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am}$	$\frac{Vs}{Am}$
$\mu_r$	Relative Permeabilität des Materials (Für Vakuum und Luft: 1)	-
$\mu$	Permeabilität	$\frac{Vs}{Am}$
$R_m$	Magnetischer Widerstand	$\frac{A}{Vs}$
$\Lambda$	Magnetischer Leitwert	$\frac{Vs}{A}$
$L$	Induktivität	$\frac{Vs}{A} = H$
$L_{12}$	Induktivität einer Ringspule mit zwei Wicklungen $N_1$ und $N_2$	$\frac{Vs}{A} = H$
$N$	Anzahl Wicklungen einer Ringspule	-
$u_L$	Induktive Spannung	$V$

Eigenschaften

Magnetfeld ohne Strom  
 Feldlinien sind in sich geschlossen

allgemein:

$$B = \frac{d\Phi}{dA}$$

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$H = \frac{d\Theta}{dl}$$

$$V_{m12} = \int_1^2 \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

homogen:

$$B = \frac{\Phi}{A}$$

$$\Phi = B \cdot A$$

$$H = \frac{\Theta}{l} = \frac{I \cdot N}{l}$$

$$V_m = H \cdot l$$

Gesetz von Gauss für magnetisches Feld:

$$\Phi = \oint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Maxwellsche Gleichung:

$$\Theta = \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

$$\Theta = \sum I_n$$

$$\Theta = I \cdot N = H \cdot l$$

Materialeinfluss:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \cdot \vec{H}$$

Magnetischer Widerstand, Magnetischer Leitwert:

$$R_m = \frac{1}{\Lambda} = \frac{\Theta}{\Phi} = \frac{l}{\mu \cdot A}$$

Induktivität:

$$L = N \cdot \frac{d\Phi}{dI} = N^2 \cdot \frac{d\Phi}{d\Theta} = N^2 \cdot \Lambda$$

$$L_{\text{Ringspule}} = N^2 \cdot \frac{\mu \cdot A}{l}$$

Gegeninduktivität:

$$L_{12\text{Ringspule}} = N_1 \cdot N_2 \cdot \frac{\mu \cdot A}{l}$$

Spulen- oder Verkettungsfluss:

$$N \cdot \Phi = L \cdot I$$

Übersetzungsverhältnis:

$$\ddot{u} = \frac{N_1}{N_2}$$

Strom-Spannungs-Gleichung (Induktive Spannung)

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$u_2 = L_{12} \cdot \frac{di_1}{dt}$$

Induktionsgesetz von Faraday:

$$U_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

$$U_i = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_l (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Gespeicherte Energie:

$$W = \frac{1}{2} \int_V HBdV$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot \Theta \cdot \Phi$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$$

**2.3.1 Beispiel****Spule mit Luftspalt****Geg.**  $\Phi, l_E, l_L, A, N$ 

$$B_E = B_L = \frac{\Phi}{A}$$

 $H_E$  aus Kurve  $f(B)$ 

$$H_L = \frac{B}{\mu_0}$$

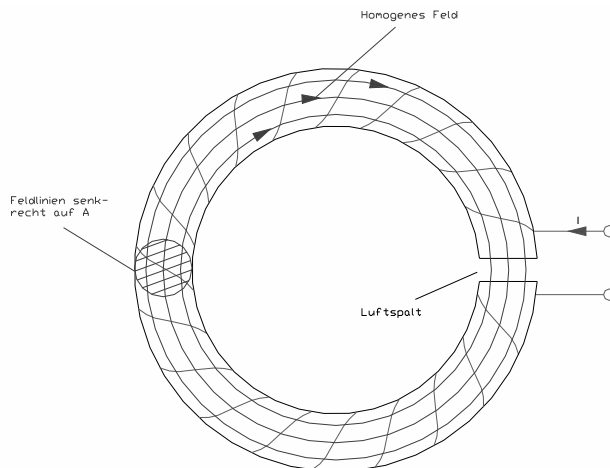
$$\begin{aligned}\Theta &= I \cdot N = H_E \cdot l_E + H_L \cdot l_L \\ I &= \frac{H_E \cdot l_E + H_L \cdot l_L}{N}\end{aligned}$$

**Geg.**  $\mu_r, A, N$ 

$$I = \frac{B}{\mu_0 \cdot N} \left( \frac{2\pi \cdot r}{\mu_r} + l_L \right)$$

### 2.3.2 Die Beschreibung des elektromagnetischen Feldes

Ein stromdurchflossener Leiter erzeugt ein Magnetfeld. Ursache dafür ist die Bewegung von elektrischen Ladungen. Auf eine Magnethadel oder Eisen-Späne wird von diesem Magnetfeld eine Kraft ausgeübt. Es handelt sich also um ein Vektorfeld. Die magnetischen Feldlinien geben, wie die elektrischen Feldlinien, in jedem Punkt die Richtung der Kraft an.



#### Die magnetische Feldstärke $\vec{H}$

Für die Ringspule gilt:  $H = \frac{n \cdot I}{l_m}$  mit  $l_m = \pi \cdot d_m$  (mittlerer Feldlinienlänge)

Einheit von H: A/cm oder A/m.

Der Zusammenhang zwischen elektrischem Strom und dem entstehenden Magnetfeld wird allgemein mit dem Durchflutungssatz beschrieben.

#### Die magnetische Flussdichte $\vec{B}$

Es gilt allgemein  $\vec{B} = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}$  für die Ringspule ist  $B = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \frac{n \cdot I}{l_m}$  Dabei ist  $\mu_r$  die relative Permeabilität und  $\mu_0 = 12,56 \cdot 10^{-9} \text{Vs}/(\text{Acm})$  die absolute Permeabilität.

Einheit von B:  $\text{Vs}/\text{cm}^2$  oder  $\text{Vs}/\text{m}^2 = \text{T}$  (Tesla)

Häufig schreibt man auch  $\mu$  wobei  $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$  gilt.

#### Der magnetische Fluss $\phi$

Für die Ringspule gilt:  $\phi = B \cdot A$

Bei Verwendung dieser Gleichung muss der Vektor der magnetischen Flussdichte  $\vec{B}$  senkrecht auf der wirksamen Fläche A stehen und über der ganzen Fläche einen konstanten Wert haben. Ansonsten muss man über Integral rechnen.

Einheit von  $\phi$ :  $\text{Vs} = 1 \text{Wb}$  (Weber)

#### Die Durchflutung $\Theta$

Die Durchflutung bezeichnet man mit  $\Theta = n \cdot I$

mit der Einheit A und meint damit die elektrische Erregung des magnetischen Feldes.

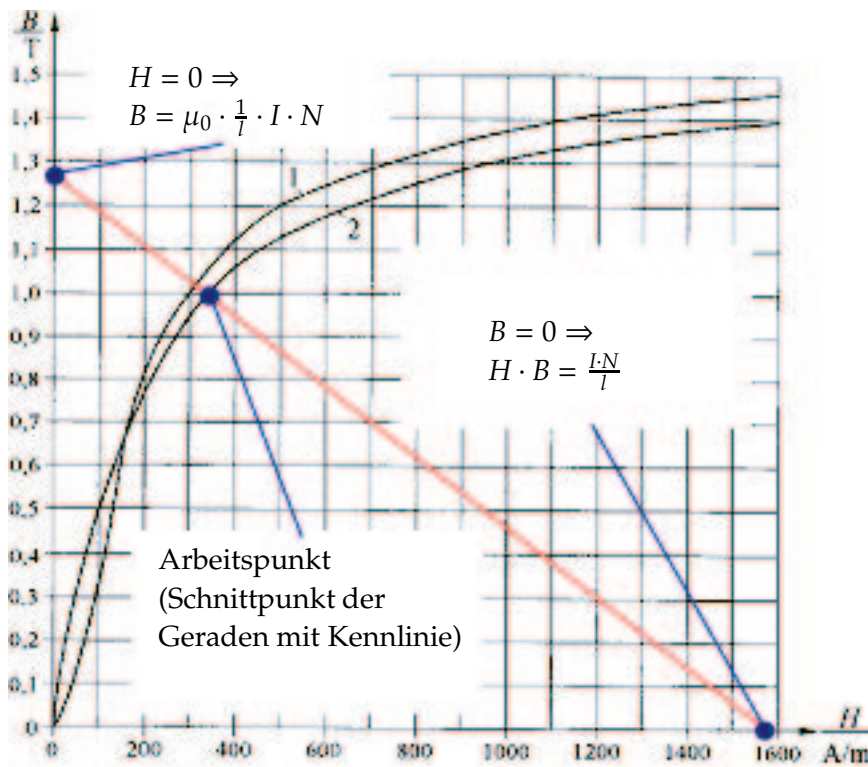
**e.g. - Durchflutungsgesetz**

Dies ist ein Beispiel in dem das magnetische Feld durch die Luft und durch Eisen geht. Dieses Problem kann mit dem Durchflutungsgesetz gelöst werden. Bei der Auflösung nach der gesuchten Variable ergibt sich eine Geradengleichung, diese Gerade kann direkt in die Magnetisierungskennlinie eingetragen werden und somit wird der gesuchte Arbeitspunkt ersichtlich.

Durchflutungsgesetz (Feldlinien durch Eisen und Luft):

$$\begin{aligned} \Theta &= I \cdot N \\ &= H_{\text{Eisen}} \cdot l_{\text{Eisen}} + H_{\text{Luft}} \cdot l_{\text{Luft}} \\ &= H_{\text{Eisen}} \cdot l_{\text{Eisen}} + \frac{B_{\text{Luft}}}{\mu_0} \cdot l_{\text{Luft}} \end{aligned}$$

$$B_{\text{Luft}} = \underbrace{-\mu_0 \cdot \frac{l_{\text{Eisen}}}{l_{\text{Luft}}}}_{m\text{-Steigung}} \cdot \underbrace{H_{\text{Eisen}}}_{x\text{-Variable}} + \underbrace{\mu_0 \cdot \frac{1}{l_{\text{Luft}}}}_{q\text{-Achsenabschnitt}} \cdot I \cdot N \quad (\text{Gerade: } B_{\text{Luft}} = f(H_{\text{Eisen}}))$$



Magnetisierungskennlinien (Neukurven) von Dynamoblech und Stahlguß (Kennlinie 1) sowie legiertem Blech (Kennlinie 2)

**Bemerkung:** Maximale Permeabilität bei steilster Tangente durch Nullpunkt.

### 2.3.3 Hall-Effekt

Der Hall-Effekt erlaubt es, das Ladungsvorzeichen zu bestimmen und er bietet eine einfache Möglichkeit, die Stärke eines Magnetfeldes zu messen.

Betrachtet man einen Leiter- oder Halbleiterstreifen mit der Länge  $l$  und der Breite  $b$ , durch den ein Strom  $I$  fließt. In einem homogenen Magnetfeld senkrecht zur Oberfläche des Streifens werden die Ladungsträger aus ihrer Flussrichtung abgelenkt gemäss der Lorentz-Kraft. Der Hall-Effekt erlaubt es, das Ladungsvorzeichen zu bestimmen und er bietet eine einfache Möglichkeit, die Stärke eines Magnetfeldes zu messen.

Betrachtet wird ein Leiter- oder Halbleiterstreifen mit der Länge  $l$  und der Breite  $b$ , durch den ein Strom  $I$  fließt. In einem homogenen Magnetfeld senkrecht zur Oberfläche des Streifens werden die Ladungsträger aus ihrer Flussrichtung abgelenkt gemäss der Lorentz-Kraft.

$$\vec{F}_L = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

Das bedeutet für den Fall, der in der Grafik dargestellt ist, dass die Ladungen auf die linke Seite wandern werden, unabhängig von ihrem Ladungsvorzeichen. Wenn die Ladungsträger positiv sind, wird die linke Seite positiver als die rechte Seite und es bildet sich zwischen links und rechts eine Potentialdifferenz.

$$U_H = \phi(\text{links}) - \phi(\text{rechts}) > 0$$

Für negative Ladungsträger dagegen ergibt sich

$U_H = \phi(\text{links}) - \phi(\text{rechts}) < 0$  Das bedeutet für den Fall, der in der Grafik dargestellt ist, dass die Ladungen auf die linke Seite wandern werden, unabhängig von ihrem Ladungsvorzeichen. Wenn die Ladungsträger positiv sind, wird die linke Seite positiver als die rechte Seite und es bildet sich zwischen links und rechts eine Potentialdifferenz.

Der Wert der Hall-Spannung  $U_H$  ergibt sich aus dem Gleichgewicht der elektrischen Kräfte

$$F_C = Q \cdot E_H \text{ und der magnetischen Kräfte } F_L.$$

$$\vec{E}_H + \vec{v} \times \vec{B} = 0$$

Herleitung der Hallspannung:

$$F = Q \cdot v \cdot B = Q \cdot B \cdot \frac{1}{b \cdot d \cdot n \cdot l}$$

$$F = Q \cdot E = Q \cdot \frac{U}{b}$$

$$v = \frac{I}{A \cdot n \cdot e} = \frac{I}{A \cdot \rho_C}$$

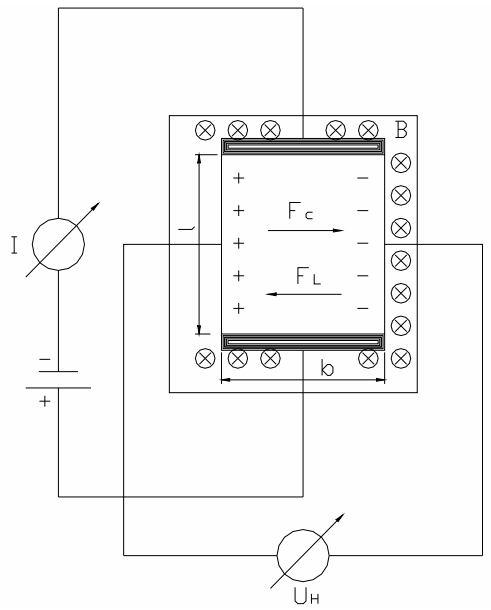
$\rho_C$  dies ist die Ladungsträgerdichte, sie kann mit Hilfe der Beziehung  $\mu = \frac{1}{\rho_\Omega \cdot \rho_C}$  ermittelt werden. Dabei ist  $\rho_\Omega$  der spezifische Widerstand des Materials. Die Hallkonstante  $R_H$  besteht aus folgender Beziehung:  $R_H = -\frac{1}{\rho_C}$ .

Somit lässt sich jetzt die Hall-Spannung (resp. Hall-Effekt) berechnen:

$$U_H = -B \cdot I \cdot \frac{1}{d \cdot \rho_C}$$

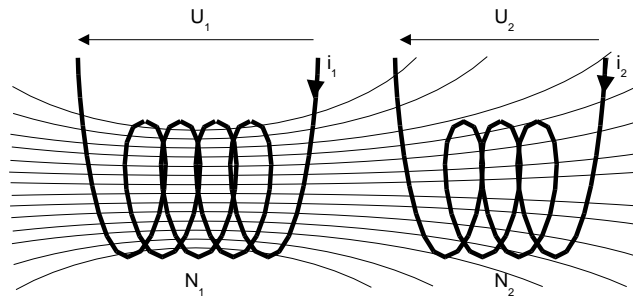
Für negative Ladungsträger dagegen ergibt sich

$$U_H = \phi(\text{links}) - \phi(\text{rechts}) < 0$$



2.3.4 Transformator

Zeichen	Beschreibung	Einheit
$k$	Kopplungsfaktor $k \leq 1$ ( $\mu_{Fe} = 0.9, \mu_{Luft} \ll 1$ )	–
$\ddot{u}$	Übersetzungsverhältnis	–



Durchflutungsgesetz

$$I_1 \cdot N_1 = H_1 \cdot l_1$$

$$\Phi_1 = B_1 \cdot A_1$$

$$B_1 = \mu \cdot H_1$$

$$H_1 = \frac{I_1 \cdot N_1}{l_1}$$

Spule 1:

$$u_1 = N_1 \cdot \frac{d\Phi_1}{dt} = N_1 \cdot A_1 \cdot \frac{dB_1}{dt} = N_1 \cdot A_1 \cdot \mu \cdot \frac{dH_1}{dt} = \underbrace{N_1 \cdot A_1 \cdot \mu \cdot \frac{N_1}{l_1}}_{\text{(Induktivität } L_1)} \cdot \frac{di_1}{dt}$$

Spule 2:

$$u_2 = N_2 \cdot k \cdot \frac{d\Phi_1}{dt} = \underbrace{N_2 \cdot k \cdot A_1 \cdot \mu \cdot \frac{N_1}{l_1}}_{\text{(Gegenind. } L_{21} = L_{12})} \cdot \frac{di_1}{dt}$$

Transformator Gleichungen

$$U_1 = \underbrace{L_1 \cdot \frac{di_1}{dt}}_{\text{Selbstinduktion}} + \underbrace{L_{12} \cdot \frac{di_2}{dt}}_{\text{Gegeninduktion}} \quad U_2 = \underbrace{L_2 \cdot \frac{di_2}{dt}}_{\text{Selbstinduktion}} + \underbrace{L_{21} \cdot \frac{di_1}{dt}}_{\text{Gegeninduktion}}$$

**Übersetzungsverhältnis**

Für  $k = 1$  (Fe-Kern) gilt:

$$\ddot{u} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{L_1}{L_{21}} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{L_{12}}{L_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \qquad -\frac{1}{\ddot{u}} = \frac{i_1}{i_2}$$

**Leistung**

$$P_1 = u_1 \cdot i_1$$

$$P_2 = u_2 \cdot i_2$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{u_1 \cdot i_1}{u_2 \cdot i_2} = \ddot{u} \cdot \left(-\frac{1}{\ddot{u}}\right) = -1$$

**2.3.5 Kräfte im elektromagnetischen Feld**

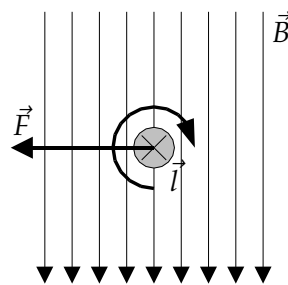


Abbildung 5: Kraft im Magnetfeld

Zeichen	Beschreibung	Einheit
$\vec{l}$	Länge des Drahts. Richtung ist Richtung des Stromflusses.	m
$\vec{F}$	Kraft, die auf den Draht wirkt.	N

$$\vec{F} = I \cdot (\vec{l} \times \vec{B})$$

$$\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

## 2.4 Induktion

---

S.??

<i>Zeichen</i>	<i>Beschreibung</i>	<i>Einheit</i>
$F$	Kraft entgegen der Verschiebung	$N$
$s$	Strecke der Verschiebung	$m$
$l$	Länge des Drahtteils im Magnetfeld	$m$

Bewegen eines Drahtes im Magnetfeld:

$$F = B \cdot I \cdot s$$

$$F = B \cdot \frac{Q}{t} \cdot s$$

$$F = B \cdot Q \cdot \frac{s}{t}$$

$$F = B \cdot Q \cdot v$$

$$\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

Induzierte Spannung:

$$U = E \cdot l = B \cdot v \cdot l$$

### 3 Schaltvorgänge

#### 3.1 RC - Glied

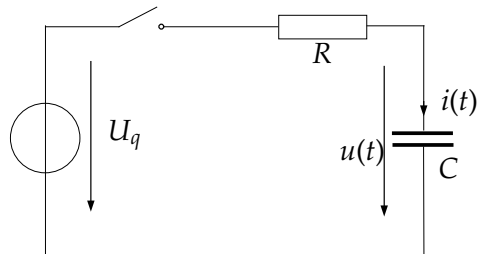


Abbildung 6: Schaltvorgang RC

Zeichen	Beschreibung	Einheit
$i_C$	Strom am Kondensator	A
$u_C$	Spannung am Kondensator	V
$U_\infty$	Spannung am Kondensator nach unendlich langer Zeit	V
$U_0$	Spannung am Kondensator zur Zeit 0	V
$C$	Kapazität des Kondensators	F
$G$	Leitwert des dem Kondensator vorgeschalteten Widerstandes	S
$\tau$	Zeitkonstante: $\tau = R \cdot C$	s

#### Eigenschaften

Strom ist proportional zur Spannungsänderung.

Spannung an einem Kondensator kann nicht sprunghaft ändern.

Bei  $t = \tau$  ist 63% ( $= 1 - e^{-1}$ ) des Endwerts erreicht.

Bei  $t = 5\tau$  ist 99% ( $= 1 - e^{-5}$ ) des Endwerts erreicht.

Tangenten schneiden den Endwert nach der Zeit  $\tau$ .

Der Kondensator verhält sich kurze Zeit nach dem Einschalten wie ein Kurzschluss, unendliche Zeit nach dem Einschalten wie eine Unterbrechung.

$$\text{Kapazitätsgleichung: } i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt}$$

$$u_C = U_\infty - (U_\infty - U_0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i_C = (U_\infty - U_0) \cdot G \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau = \frac{C}{G} = R \cdot C$$

$$U_{\infty} = u_C(\infty) \cdot U_0 = u_C(0)$$

### 3.1.1 Beispiel 1

#### Formelzeichen

Zeichen	Beschreibung	Einheit
$R$	Widerstand	$\Omega$
$C$	Kapazität	$F$ (Farad)
$U_q$	Spannungsquelle	$V$
$\tau$	Zeitkonstante: $\tau = R \cdot C$	$s$

#### RC-Schaltung

**Gesucht:** Kurvenverlauf von  $u$  und  $i$ ,  $i(100\mu s)$

**Gegeben:**  $u(t < 0) = 0$  (Kondensator ist entladen),  $R = 4700\Omega$ ,  $C = 10nF$ ,  $U_q = 5V$

**Kurvenverlauf von  $u(t)$  und  $i(t)$ :**

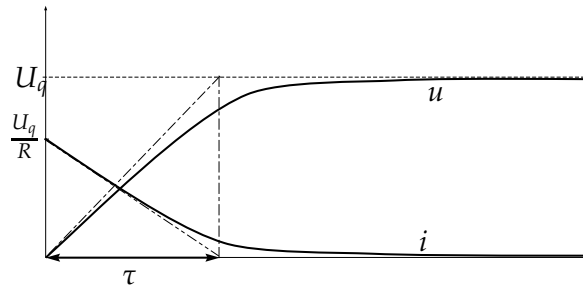


Abbildung 7: Schaltungsverlauf

**Berechnung von  $u(t)$  und  $i(t)$ :**

**Satz:** Nach einem  $\tau$  ist  $u = 63\%$

$$\tau = R \cdot C = 4700\Omega \cdot 10nF = 47\mu s$$

$$u(t) = U_\infty - (U_\infty - U_0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u(100\mu s) = 5V - (5V - 0V) \cdot e^{-\frac{100\mu s}{47\mu s}} = 4.4V \quad \checkmark$$

$$i(t) = (U_\infty - U_0) \cdot G \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i(100\mu s) = (5V - 0V) \cdot \frac{1}{4700\Omega} \cdot e^{-\frac{100\mu s}{47\mu s}} = 127\mu A \quad \checkmark$$

3.1.2 Beispiel 2

Kondensator am Anfang geladen [ $u(t < 0) = 15V$ ]

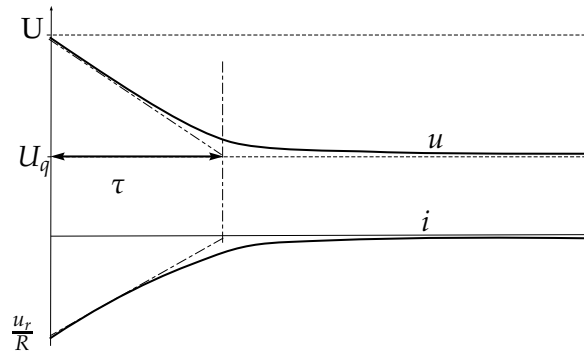


Abbildung 8: Schaltungsverlauf bei geladenem Kondensator

$$u(t < 0) = 15V$$

$$t = 0 : u_r = 5V - 15V = -10V$$

$$u(t) = 5V - (5V - 15V) \cdot e^{-\frac{t}{47\mu s}} \implies u(30\mu s) = 10.28V \quad \checkmark$$

$$i(t) = (5V - 15V) \cdot \frac{1}{4700\Omega} \cdot e^{-\frac{t}{47\mu s}} \implies i(30\mu s) = -1.1mA \quad \checkmark$$

## 3.2 RL-Glied

Zeichen	Beschreibung	Einheit
$i_L$	Strom an der Spule	A
$u_L$	Spannung an der Spule	V
$I_\infty$	Strom an der Spule nach unendlich langer Zeit	V
$I_0$	Strom an der Spule zur Zeit 0	V
$L$	Induktivität der Spule	$\frac{Vs}{A} = H$
$R$	Widerstand des der Spule vorgeschalteten Widerstandes	$\Omega$
$\tau$	Zeitkonstante: $\tau = \frac{L}{R}$	s

## Eigenschaften

Spannung ist proportional zur Stromänderung.

Strom an einer Spule kann nicht sprunghaft ändern.

Bei  $t = \tau$  ist 63% ( $= 1 - e^{-1}$ ) des Endwerts erreicht.

Bei  $t = 5\tau$  ist 99% ( $= 1 - e^{-5}$ ) des Endwerts erreicht.

Tangenten schneiden den Endwert nach der Zeit  $\tau$ .

$$\text{Induktivitätsgleichung: } u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

$$i_L = I_\infty - (I_\infty - I_0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_L = (I_\infty - I_0) \cdot R \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau = \frac{L}{R} = G \cdot L$$

$$I_\infty = i_L(\infty) \cdot I_0 = i_L(0)$$

## 4 Nichtlineare Kennlinien

### 4.1 Vorgehensweisen

1. Korrekt rechnen mit e-Funktion oder ln oder Polynomen (genau aber aufwändig)
2. Graphisch (anschaulich aber ungenau)
3. Linearisierung im Arbeitspunkt

### 4.2 Linearisierung

1. Arbeitspunkt abschätzen und Tangente "zeichnen"
2. Geradengleichung, lineare Ersatzquelle
3. Plausibilitätskontrolle
4. Iteration

4.2.1 Beispiel: Ladung eines Akkus

Zeichen	Beschreibung	Einheit
$I_L$	Strom am Ladegerät	A
$U_L$	Spannung am Ladegerät	V
$R_L$	Innenwiderstand des Ladegeräts	$\Omega$
$U_d$	Spannung an der Diode (Rückstromschutz)	V
$I_A$	Strom am Akku	A
$U_A$	Spannung des Akkus	V
$R_A$	Innenwiderstand des Akkus	$\Omega$
$U_{A2}$	Spannung über Akku	V

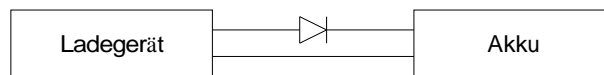


Abbildung 9: Ladung eines Akkus: Prinzipschema

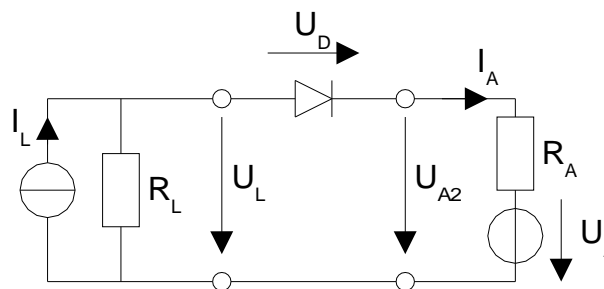


Abbildung 10: Ladung eines Akkus: Schaltplan

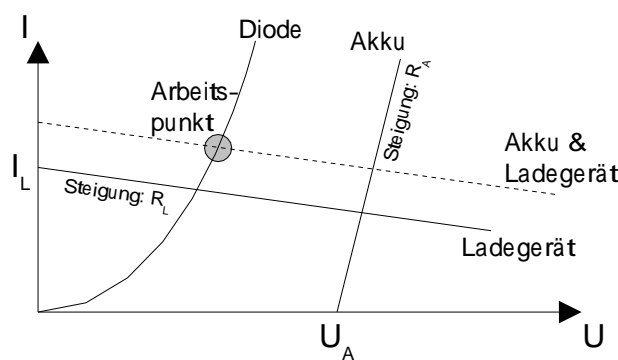


Abbildung 11: Ladung eines Akkus: Diagramm

Für die Akku & Ladegerät Kurve werden der Strom beibehalten und die Spannungen  $U_L$  und  $U_A$  addiert.

## 5 Wechselstrom

### 5.1 Allgemein

Zeichen	Beschreibung	Einheit
$T$	Periodendauer	s
$f$	Frequenz	$\frac{1}{s} = \text{Hz}$
$\omega$	Winkelfrequenz	$\frac{1}{s} = s^{-1}$
$n$	Periode (Nummer)	–
$u(t)$	zeitabhängige physikalisch reale Spannung	V
$\underline{u}(t)$	komplexe zeitabhängige Spannung	V
$\hat{u}$	Amplitude	V
$\hat{\underline{u}}$	komplexe Amplitude	V
$\bar{u}$	Arithmetischer Mittelwert	V
$ \bar{u} $	Gleichrichtwert	V
$\underline{U}$	komplexer Effektivwert	V
$\bar{U}$	Effektivwert (gleiche Wirkleistung wie bei Gleichstrom)	V

$$f = \frac{1}{T}$$

$$u(t) = u(t + n \cdot T)$$

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_n)$$

$$\bar{u} = 0 \quad (\text{per Definition})$$

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad (\text{allgemein})$$

$$|\bar{u}| = \frac{1}{T} \int_0^T |u| dt$$

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T u^2 dt}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

## 5.2 Spezialfälle

S.121

Name	Formel	Sinus	Dreieck	Rechteck
Gleichricht	$ \bar{u}  = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T  u  dt$	$\hat{u} \cdot \frac{2}{\pi}$	$\hat{u} \cdot \frac{1}{2}$	$\hat{u}$
Mittel	$\bar{u} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u dt$			
Effektiv	$U = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T u^2 dt}$	$\hat{u} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\hat{u} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\hat{u}$
Formfaktor	$F = \frac{u_{eff}}{ \bar{u} }$	1.111	1.155	1
Scheitelfaktor	$\delta = \frac{\hat{u}}{u_{eff}}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	1

- Hinweis: Messgeräte (z.B. Oszilloskop) messen meistens den Gleichrichtwert und zeigen den Effektivwert an → Formfaktor

### 5.3 Komplexe Spannung

$$\underline{U} = U e^{j\varphi_n} = U \angle \varphi_n$$

Für Sinus:  $\underline{U} = U \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

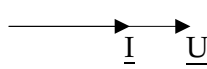
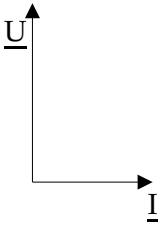
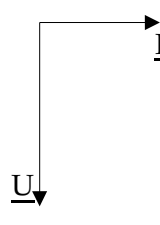
Physikalisch reelle Spannung:

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_n)$$

Vollständig komplexe Spannung:

$$\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot (\cos(\omega t + \varphi_n) + j \cdot \sin(\omega t + \varphi_n))$$

$$\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_n)}$$

Widerstand	Induktivität (Spule)	Kapazität (Kondensator)
	u voreilend	i voreilend
$i = \frac{u}{R}$ $u = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ $i = \frac{\hat{u}}{R} \cdot \sin(\omega t)$ $\frac{\hat{u}}{\hat{i}} = R$ $\varphi = 0$ $\underline{U} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\omega t} < 0$ $\underline{I} = \frac{u}{R} = \frac{\hat{u} \cdot e^{j\omega t}}{\sqrt{2} \cdot R}$ $\boxed{\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R}$	$u = L \cdot \frac{di}{dt}$ $i = \hat{i} \cdot \sin(\omega t)$ $u = L \cdot \hat{i} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$ $\frac{\hat{u}}{\hat{i}} = L \cdot \omega$ $\varphi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ $\underline{I} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\omega t}$ $\underline{U} = L \cdot \frac{dI}{dt} = L \cdot \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t}$ $\boxed{\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = j\omega L}$	$i = C \cdot \frac{du}{dt}$ $u = \hat{u} \cdot \sin(\omega t)$ $i = \hat{u} \cdot C \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$ $\frac{\hat{u}}{\hat{i}} = \frac{1}{C \cdot \omega}$ $\varphi = -90^\circ = -\frac{\pi}{2}$ $\underline{U} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\omega t}$ $\underline{I} = C \cdot \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \cdot j\omega \cdot e^{j\omega t}$ $\boxed{\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C}}$
		

### 5.4 Kompensation

Vereinfachte Formel für die Berechnung eines Kompensationskondensators.

$$C = \frac{P \cdot (\tan \phi_1 - \tan \phi_2)}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot U^2}$$

## 5.5 Komplexer Widerstand und Leitwert

S.123,126

Zeichen	Beschreibung	Einheit
$\underline{Z}$	Scheinwiderstand (Impedanz)	$\Omega$
$R$	Wirkwiderstand (Resistanz)	$\Omega$
$X$	Blindwiderstand (Reaktanz)	$\Omega$
$\underline{Y}$	Scheinleitwert (Admitanz)	$S$
$G$	Wirkleitwert (Konduktanz)	$S$
$B$	Blindleitwert (Suszeptanz)	$S$

	Serie-Schaltungen	Parallel-Schaltungen
Formeln	$\underline{Z} = R + jX = Z \angle \varphi$	$\underline{Y} = G + jB = Y \angle \varphi$
Ohmsches Gesetz	$\underline{Z} = \frac{U}{I} = \frac{1}{\underline{Y}}$	$\underline{Y} = \frac{I}{U} = \frac{1}{\underline{Z}}$
Widerstand	$\underline{Z} = R$	$\underline{Y} = G$
Induktivität	$\underline{Z} = j\omega L$	$\underline{Y} = \frac{1}{j\omega L}$
Kapazität	$\underline{Z} = \frac{1}{j\omega C}$	$\underline{Y} = j\omega C$
Serie-Schaltungen	$\underline{Z}_e = \sum \underline{Z}_n = \sum R_n + j \sum X_n$	
Parallel-Schaltungen		$\underline{Y}_e = \sum \underline{Y}_n = \sum G_n + j \sum B_n$

5.6 Komplexe Leistung

Zeichen	Beschreibung	Einheit
$\underline{S}$	Scheinleistung	W
$P$	Wirkleistung	W
$X$	Blindleistung	W
$\underline{I}^*$	Konjugiert Komplexe von $\underline{I}$	A

Formeln	$\underline{S} = P + jQ = S \angle \varphi$
Ohmsches Gesetz	$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underline{Z} \cdot I^2 = \underline{Y}^* \cdot U^2$
Widerstand	$\underline{S} = R \cdot I^2 = G \cdot U^2$
Induktivität	$\underline{S} = j\omega L \cdot I^2 = \frac{j}{\omega L} \cdot U^2$
Kapazität	$\underline{S} = -j\omega C \cdot U^2 = -\frac{j}{\omega C} \cdot I^2$
Serie-Schaltungen	$\underline{S} = \underline{Z} \cdot I^2 = \sum P_n + j \sum Q_n$
Parallel-Schaltungen	$\underline{S} = \underline{Y}^* \cdot U^2 = \sum P_n + j \sum Q_n$

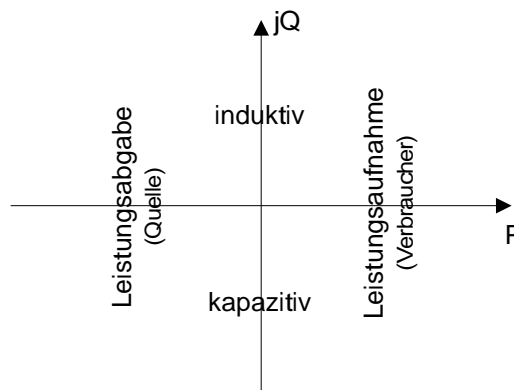


Abbildung 12: Komplexe Leistung

5.7 Wechselstromleistung

S.164

	Parallel Ersatzschaltung	Reihen Ersatzschaltung
Schaltbild		
komplexer Widerstand		$\underline{Z} = R + jX$
komplexer Leitwert	$\underline{Y} = G + jB$	
Scheinwiderstand		$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$
Scheinleitwert	$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$	
Wirkwiderstand		$R = Z \cos \varphi = \frac{U_w}{I}$
Wirkleitwert	$G = Y \cos \varphi_Y = \frac{I_w}{U}$	
Blindwiderstand		$X = Z \sin \varphi = \frac{U_b}{I}$
Blindleitwert	$B = -Y \sin \varphi_Y = \frac{-I_b}{U}$	
komplexe Leistung	$\underline{S} = \underline{Y}^* \cdot U^2 = (G - jB)U^2$	$\underline{S} = \underline{Z}I^2 = (R + jX)I^2$
Wirkleistung	$P = I_w U = \frac{I_w^2}{G} = U^2 G$	$P = U_w I = \frac{U_w^2}{R} = I^2 R$
Blindleistung	$Q = -I_b U = -\frac{I_b^2}{B} = -U^2 B$	$Q = U_b I = \frac{U_b^2}{X} = I^2 X$
Scheinleistung	$S = UI = U \sqrt{I_w^2 + I_b^2}$	$S = UI = I \sqrt{U_w^2 + U_b^2}$
Wirkfaktor	$\cos \varphi = \frac{G}{Y}$	$\cos \varphi = \frac{R}{Z}$
Blindfaktor	$\sin \varphi = \frac{B}{Y}$	$\sin \varphi = \frac{X}{Z}$
Wirkstrom	$I_w = I \cos \varphi_Y = GU$	
Wirkspannung		$U_w = U \cos \varphi = RI$
Blindstrom	$I_b = -I \sin \varphi_Y = -BU$	
Blindspannung		$U_b = U \sin \varphi = XI$

## 6 Filter, Übertragungsfunktion und Bodediagramm

### 6.1 Bodediagramm

Zeichen	Beschreibung	Einheit
$\underline{G}$	Übertragungsfunktion	–
$A(\omega)$	Übertragungsfunktion in $dB$	$dB$
$\omega$	Kreisfrequenz	$\frac{1}{s}$
$\omega_g$	Grenzkreisfrequenz ( $\omega$ bei $G = \frac{1}{\sqrt{2}} = -3dB$ )	$\frac{1}{s}$
$\Omega = \frac{\omega}{\omega_g}$		–
$G$	Amplitudengang	–
$\varphi_G$	Phasengang (Winkel der Komplexen Zahl $\underline{G}$ )	–
$Q$	Güte, Gütefaktor	–
$D$	Dämpfungsfaktor	–

$$\underline{G} = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}$$

$$A(\omega) = 20 \log_{10}(|\underline{G}|)$$

$$\omega_g = \frac{1}{\tau}$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_g} = \frac{f}{f_g}$$

$$D = \frac{1}{Q}$$

## 6.2 RC - Tiefpassfilter

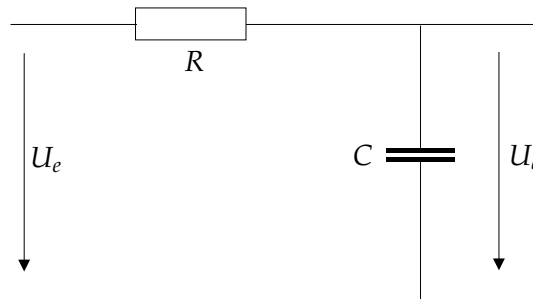


Abbildung 13: RC-Tiefpassfilter

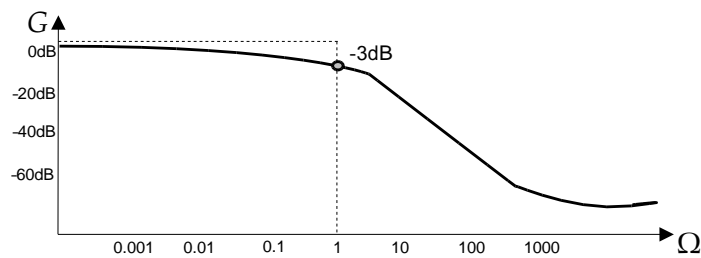


Abbildung 14: Amplitudengang

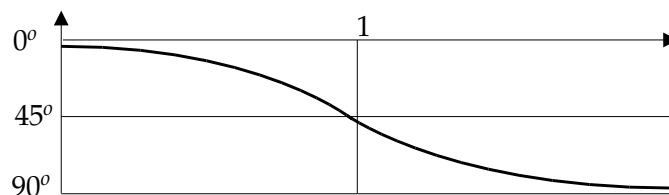


Abbildung 15: Phasengang

$$\underline{U}_a = \underline{U}_e \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \underline{U}_e \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$\underline{G} = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$\omega_g = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$$

$$\frac{\omega}{\omega_g} = \frac{f}{f_g} = \Omega$$

$$\underline{G} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_g}} = \frac{1}{1 + j\Omega}$$

$$G = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}}$$

$$\varphi_G = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)$$

### 6.3 RC - Hochpassfilter

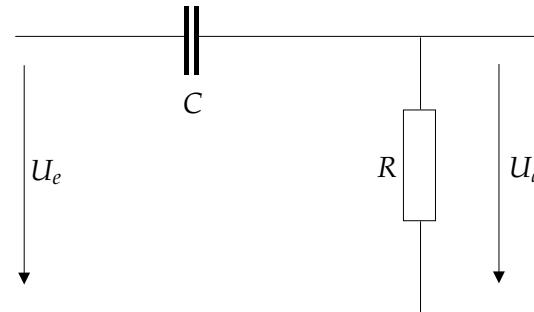


Abbildung 16: RC-Hochpassfilter

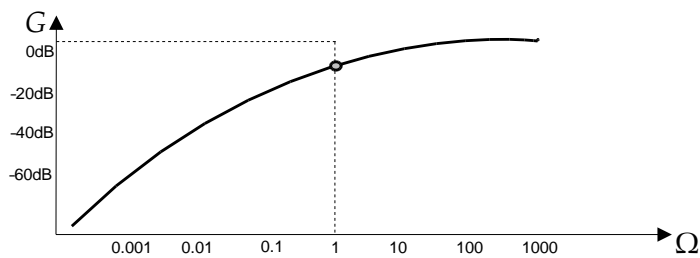


Abbildung 17: Amplitudengang

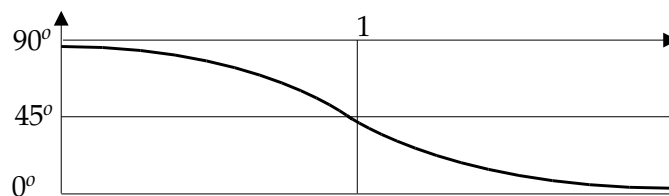


Abbildung 18: Phasengang

$$\underline{G} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1}$$

$$\underline{G} = \frac{\frac{j\omega}{\omega_g}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_g}} = \frac{j\Omega}{1 + j\Omega}$$

$$G = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega_g}\right)^2}}$$

$$\varphi_G = \arctan\left(\frac{1}{\omega_g}\right)$$

6.4 RLC - Tiefpassfilter

S.361

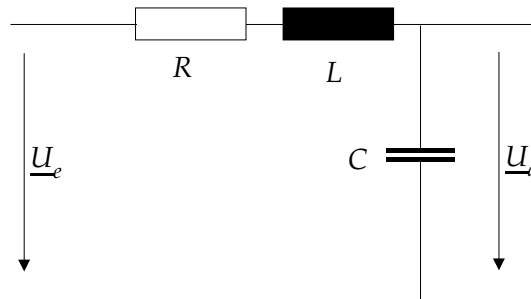


Abbildung 19: RLC-Tiefpassfilter

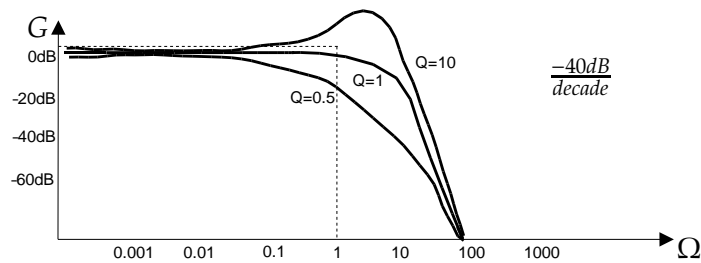


Abbildung 20: Amplitudengang

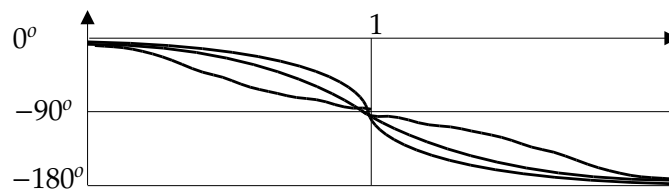


Abbildung 21: Phasengang

$$\underline{G} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{j\omega RC - \omega^2 LC + 1} = \frac{1}{1 + \frac{j}{Q}\Omega - \Omega^2}$$

$$\omega_g = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q = \frac{U_a}{U_e} \text{ (bei } \omega_g) = \frac{\omega_g L}{R} = \frac{1}{\omega_g CR}$$

### 6.5 RLC - Hochpassfilter

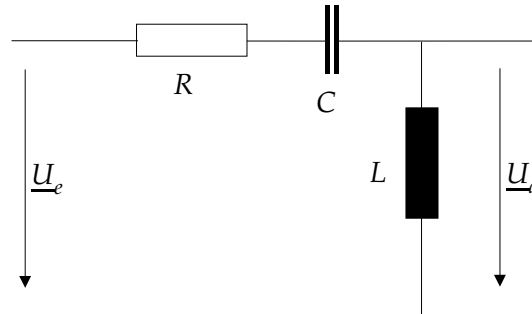


Abbildung 22: RLC-Hochpassfilter

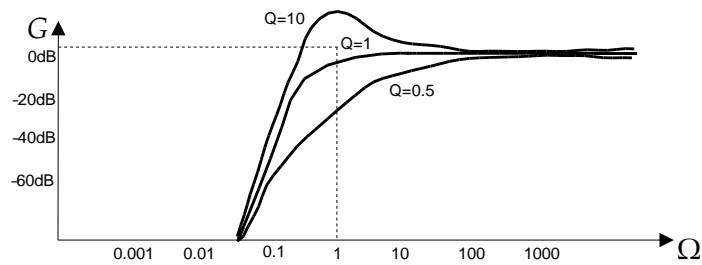


Abbildung 23: Amplitudengang

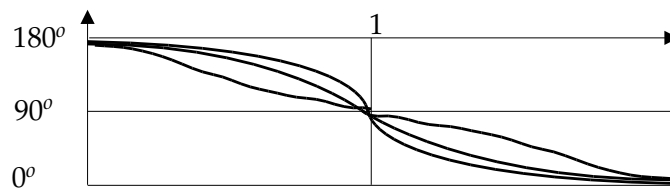


Abbildung 24: Phasengang

$$\underline{G} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{-\Omega^2}{1 + j\frac{1}{Q}\Omega - \Omega^2}$$

### 6.5.1 Doppel-T-Filter

Berechnung der Übertragungsfunktion mit Knotenpotentialverfahren:

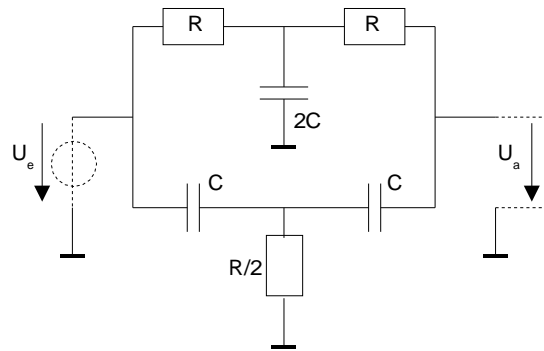


Abbildung 25: Doppel-T-Filter

### 6.6 Umwandlung der Schaltung

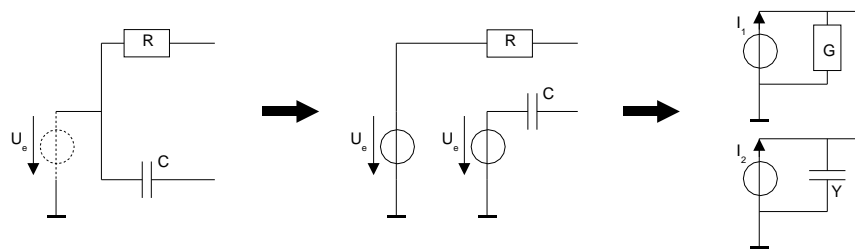


Abbildung 26: Umwandlung der Quelle

$$I_1 = \frac{U_e}{R} \qquad G = \frac{1}{R} \qquad I_2 = \underline{U_e} \cdot \underline{Y} = \underline{U_e} \cdot j\omega C \qquad \underline{Y} = j\omega C$$

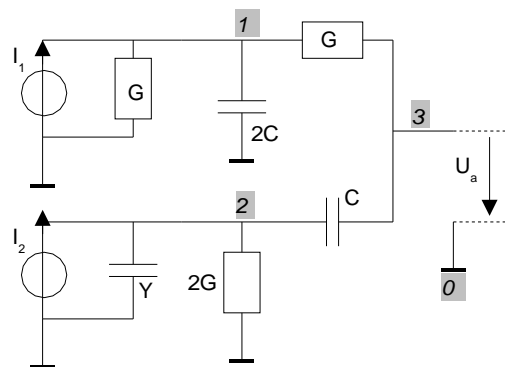


Abbildung 27: Knoten

## 6.6.1 Berechnung der Übertragungsfunktion

$$[\underline{Y}] \cdot [\underline{U}] = [\underline{I}]$$

$$\begin{bmatrix} 2G + 2j\omega C & 0 & -G \\ 0 & 2G + 2j\omega C & -j\omega C \\ -G & -j\omega C & G + j\omega C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_{10} \\ \underline{U}_{20} \\ \underline{U}_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_e \cdot G \\ \underline{U}_e \cdot j\omega C \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\underline{U}] = \begin{bmatrix} \underline{U}_{10} \\ \underline{U}_{20} \\ \underline{U}_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{jU_e(-j+\omega RC)}{-4j\omega CR + \omega^2 C^2 R^2 - 1} \\ \frac{\omega C U_e R(-j+\omega RC)}{-4j\omega CR + \omega^2 C^2 R^2 - 1} \\ \frac{U_e(\omega^2 C^2 R^2 - 1)}{-4j\omega CR + \omega^2 C^2 R^2 - 1} \end{bmatrix}$$

$$G = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{U}_{30}}{\underline{U}_e} = \frac{\omega^2 C^2 R^2 - 1}{-4j\omega CR + \omega^2 C^2 R^2 - 1} = \frac{1 - \omega^2 R^2 C^2}{1 - \omega^2 R^2 C^2 + 4j\omega CR}$$

**Bemerkung:** Tiefe und hohe Frequenzen werden durchgelassen (1:1). Bestimmter Bereich für  $1 - \omega^2 R^2 C^2 = 0$  wird herausgefiltert.

## 7 Operationsverstärker

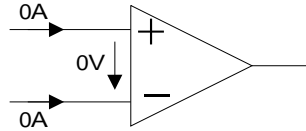


Abbildung 28: Operationsverstärker

Das Schaltbild in Abbildung 30 ist der Schlüssel für die meisten Schaltungen mit Operationsverstärkern.

Ausnahmen: Schmidt-Trigger, Schwingungen, Oszillatoren

### 7.1 Beispiel 1

(Mit Widerständen: Nicht invertierender Verstärker)

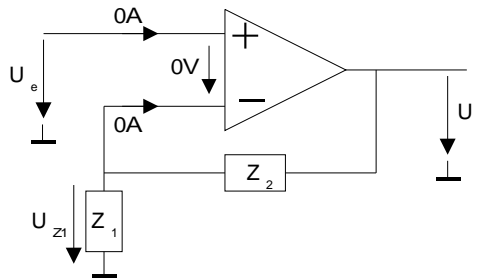


Abbildung 29: Beispiel einer Operationsverstärkerschaltung

$$\underline{U_e} = \underline{U_{Z1}} \qquad \underline{U_{Z1}} = \underline{U_a} \cdot \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}$$

$$\underline{U_e} = \underline{U_a} \cdot \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}$$

$$\underline{G} = \frac{\underline{U_a}}{\underline{U_e}} = \frac{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}}{\underline{Z_1}} = 1 + \frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}}$$

## 7.2 Beispiel 2

(Mit Widerständen: Invertierender Verstärker)

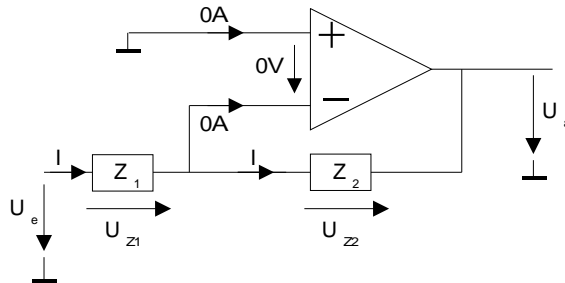


Abbildung 30: Beispiel einer Operationsverstärkerschaltung

$$\underline{U_{Z1}} = \underline{U_e} \qquad I = \frac{\underline{U_e}}{\underline{Z_1}}$$

$$\underline{U_{Z2}} = -\underline{U_a} \qquad I = \frac{-\underline{U_a}}{\underline{Z_2}}$$

$$\frac{\underline{U_e}}{\underline{Z_1}} = -\frac{\underline{U_a}}{\underline{Z_2}}$$

$$G = \frac{\underline{U_a}}{\underline{U_e}} = -\frac{\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}}$$

## 8 Messtechnik

### 8.1 Messfehler

#### 8.1.1 Zufällig

Jedesmal anders, nicht ohne Aufwand korrigierbar

- Reibung des Zeigers
- Toleranzen von Widerständen
- Temperatureinflüsse
- Störungen eingekoppelt

#### **Analoges Messgerät:**

Genauigkeitsklasse k:  $\pm k\%$  vom Messbereich (Vollausschlag)

#### **Digitales Messgerät**

$\pm(0.25\% + 1D)$  0.25% Abweichung vom Messwert und  $\pm 1$  für die letzte angezeigte Ziffer

#### 8.1.2 Berechnen der Messfehler

Bei der Multiplikation addieren sich die relativen Messfehler.

$$\delta U_R = \delta R + \delta I$$

Bei der Addition verwendet man das geometrische Mittel.

$$\Delta U_{NG} = \sqrt{\Delta U_R^2 + \Delta U_A^2}$$

#### 8.1.3 Systematisch

Messgerät verändert Schaltung, jedesmal gleich, korrigierbar.

- Stromfehlerschaltung
- Spannungsfehlerschaltung

#### **Beachte:**

Wenn der systematische Fehler kleiner als die Toleranz des Messgerätes ist, muss er nicht berücksichtigt werden!